Programme de colle n°6

semaine du 3 au 7 novembre

Notions vues en cours

Chapitre 8 – Généralités sur les fonctions (suite)

- Sens de variation d'une fonction, monotonie de $f+g$, λf, de $g \circ f$ en fonction des monotonies de f et de g ainsi que du signe de λ. Si f et g sont positives et croissantes, alors fg l'est aussi. Adaptations en cas de stricte montonie
- Fonction majorée, minorée, bornée, positive, négative (et les variantes avec "strictement"), maximum (global) et minimum (global) d'une fonction, notation $\max_{x \in D} f(x)$ ou $\max_D f$
- Asymptote horizontale, verticale
- Continuité ponctuelle, continuité globale : f est continue sur A si elle est continue en chaque point de A
- Dérivabilité ponctuelle d'une fonction, nombre dérivé de f en a, taux d'accroissement de f en a
- Dérivabilité globale : f est dérivable sur A si elle est dérivable en chaque point de A, fonction dérivée f', ensemble de dérivabilité de f qui est noté $D_{f'}$
- Dérivées de $\lambda u+\mu v$, de uv, de $\frac{1}{u}$, de $\frac{u}{v}$, de u^n avec $n \in \mathbb{Z}$, de $v \circ u$, dérivées de fonctions usuelles (un formulaire est disponible en ligne)
- Tangente en un point : équation, représentation graphique
- Liens entre sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée sur un intervalle
- Étude d'une fonction avec pour objectif de la tracer
- Dérivation d'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$, mêmes formules de dérivation que pour les fonctions de $\mathbb{R}^I$, dérivation de $t \mapsto e^{\varphi(t)}$ avec $\varphi : I \to \mathbb{C}$ dérivable (vue au chapitre 8)
- Avec I un intervalle **ouvert**, f est continue (resp. dérivable) sur I ssi $f\big|_I$ est continue (resp. dérivable)

Chapitre 9 – Fonctions usuelles

- Théorème de la bijection monotone, représentation graphique de la courbe de f^{-1} en fonction de celle de f
- Fonctions usuelles (et leurs propriétés) : logarithmes (ln et $\log_a$), exponentielles (e^x, a^x avec $a>0$), puissances ($x \mapsto x^\alpha$ avec α dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$), croissances comparées (démonstration non exigible)
- Fonctions trigonométriques : cos, sin, tan, arccos, arcsin, arctan, ch, sh, th. Pour chaque fonction : définition, valeurs remarquables, éventuelles parité / périodicité / limites en $\pm\infty$, sens de variation, ensemble de dérivabilité, dérivée et représentation graphique
- Formules pour $\sin(\arcsin x)$, $\arcsin(\sin x)$, $\cos(\arcsin x)$, formules équivalentes avec arccos, formules $\tan(\arctan x)$, $\arctan(\tan x)$

La notion de limite est intuitive : on ne demandera pas de justifier une limite "simple" faisant intervenir une seule fonction usuelle. Les opérations sur les limites (y compris la composition) sont utilisables.

Les exercices porteront majoritairement sur du calcul de dérivée et sur le Chapitre 9

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **7 à 9**).

Question Longue. *Cette semaine, AUCUNE démonstration n'est exigible.*

1. Énoncés du théorème de la bijection monotone et du théorème qui détermine la dérivabilité de f^{-1} en un point y. Chapitre 9, Théorèmes 9.1 (sans l'assertion 2) et 9.2
2. Ensembles de définition, d'arrivée, de dérivabilité, expression de la dérivée et *représentation graphique* de deux fonctions parmi arccos arcsin arctan ch sh th . Pour ch, sh, th, on devra également donner la définition de l'expression de ch$x$, sh$x$, th$x$.
3. Donner les primitives de $\frac{u'}{u}$, $u'u^\alpha$ (avec $\alpha \neq 1$), de $u'(ax+b)$ avec $(a,b) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$, de $u'e^u$. L'examinateur demandera également un calcul d'une ou deux primitives utilisant ces formules.
Note : vous pouvez trouver un entrainement au calcul de primitives via le cahier de calcul[1] *au format numérique, accessible à la page* `https://colasbd.github.io/cdc/` *: descendre à "Énoncés seuls", etc.*

Questions Flash au programme :

Chapitre 9 :

- Énoncer le théorème de la bijection monotone. On pourra en faire tout ou partie oralement...
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective. Quelles sont les hypothèses à vérifier pour affirmer que f^{-1} est dérivable en y ? Que vaut alors $(f^{-1})'(y)$?
- Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Exprimer x^y avec des fonctions usuelles. Pour quelles valeurs de x et de y est-ce que cela a un sens ?
- Énoncer les croissances comparées en $+\infty$
- Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de arcsin ? et de arccos ?
- Pour quelles valeurs de x a-t-on $\arcsin(\sin x) = x$? Et $\sin(\arcsin x) = x$?
- Pour quelles valeurs de x a-t-on $\arccos(\cos x) = x$? Et $\cos(\arccos x) = x$?
- Donner les dérivées de $\arccos x$ et de $\arctan x$.
- Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de arctan ? et de th ?
- Donner deux expressions de la dérivée de th$x$.

Chapitre 8 :

- Soit f, g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$. Que signifie $f \leq g$?
- Soit f et g deux fonctions dont on note D_f et D_g les ensembles de définitions. Que doit vérifier un réel x pour que $(g \circ f)(x)$ ait un sens ?
- Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Donner la définition de "f est croissante" et de "f est strictement décroissante"
- Si f est croissante et g est décroissante, quelle est la monotonie de $g \circ f$? Et si f et g sont toutes deux décroissantes ?
- Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Donner la définition de "f est majorée"

[1] *Merci à tous les collaborateurs qui ont permis la création et la diffusion de ce cahier !*

- Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Donner une caractérisation en termes de quantificateurs de "f est bornée"
- Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Donner la définition de "f admet un minimum en a"
- Donner la définition de "f est continue en a"
- Donner la définition de "f est dérivable en a"
- Donner deux formules de dérivation (au choix de l'examinateur)

Chapitre 7 :

- Soit $A \subset E$. Donner la définition de l'application indicatrice sur A.
- Soit $f : E \to F$ et $B \subset F$. Compléter : $x \in f^{-1}(B) \iff \dots\dots$
- Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$. Compléter : $y \in f(A) \iff \dots\dots$
- Soit $f : E \to F$. Donner la définition de "f est injective" en termes de quantificateurs.
- Idem que ci-dessus, ou bien avec "f est surjective", ou bien avec "f est bijective".
- Soit $f : E \to F$. Si f est injective, que peut-on dire de l'équation (Eq_y) : $\quad y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$?
- Idem que ci-dessus, ou bien avec "f est surjective", ou bien avec "f est bijective".
- Compléter les formules : $(f^{-1})^{-1} = \dots$ et $(g \circ f)^{-1} = \dots$
- Rappeler la définition d'une similitude directe.